ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Dương Thị Vân Anh

VỀ HỌ CHUẨN TẮC CÁC HÀM PHÂN HÌNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Dương Thị Vân Anh

VỀ HỌ CHUẨN TẮC CÁC HÀM PHÂN HÌNH

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 62 46 01 02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Cán bộ hướng dẫn khoa học
PGS.TSKH. TRẦN VĂN TẤN

Thái Nguyên - 2017

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi dưới sự hướng dẫn tận tình của PGS. TSKH. Trần Văn Tấn. Trong quá trình nghiên cứu, tôi đã kế thừa thành quả khoa học của các nhà khoa học với sự trân trọng, biết ơn và đã được sự nhất trí của thầy hướng dẫn khi đưa vào luận văn. Các số liệu, kết quả nêu trong luận văn là trung thực.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2017

Người viết luận văn

Dương Thị Vân Anh

Xác nhận của Trưởng (phó) khoa chuyên môn	Xác nhận của người hướng dẫn khoa học
	PGS. TSKH. Trần Văn Tấn

LỜI CẢM ƠN

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của PGS. TSKH. Trần Văn Tấn. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến Thầy. Đồng thời tác giả xin được nói lời cảm ơn chân thành tới Ban Giám hiệu trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên, cùng các thầy cô giáo trong khoa Sau đại học và khoa Toán đã quan tâm và tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tác giả hoàn thành tốt luận văn của mình.

Tác giả cũng xin chân thành cảm ơn các thầy cô phản biện đã dành thời gian đọc và đóng góp những ý kiến quý báu cho bài luận văn này.

Cuối cùng tôi muốn bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới những người thân trong gia đình của mình, những người đã động viên chia sẻ mọi khó khăn cùng tôi trong thời gian qua để tôi có thể hoàn thành tốt bài luận văn.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2017

Tác giả

Dương Thị Vân Anh

Mục lục

Mở đầu

Lý thuyết họ chuẩn tắc các hàm phân hình được đưa ra bởi Montel từ những năm đầu của thế kỷ hai mươi: một họ F các hàm phân hình trên một miền D của mặt phẳng phức được gọi là chuẩn tắc, nếu mỗi dãy trong họ, đều trích được dãy con hội tụ đều trên các tập con compact tới một hàm phân hình hay hàm đồng nhất bằng vô cùng. Trong suốt hơn 100 năm qua nhiều tiêu chuẩn cho họ chuẩn tắc đã được thiết lập bởi đông đảo các nhà toán học. Nhằm hiểu sâu hơn về nội dung của Lý thuyết này, chúng tôi chọn nghiên cứu đề tài "Về họ chuẩn tắc các hàm phân hình".

Nội dung của luận văn gồm hai chương:

Chương 1: Khái niệm họ chuẩn tắc các hàm phân hình.

Trong chương này, chúng tôi tìm hiểu khái niệm họ chuẩn tắc, trình bày một số kiến thức cơ bản của khoảng cách cầu, dãy các hàm phân hình và họ các hàm phân hình. Đồng thời nhắc lại một số hàm cơ bản của Lý thuyết Nevanlinna. Những kiến thức này là nền tảng để nghiên cứu chương sau.

Chương 2: Một số tiêu chuẩn cho họ chuẩn tắc các hàm phân hình.

Nội dung chương này là tìm hiểu các kết quả cổ điển của Montel, Miranda, Bloch, Gu về họ chuẩn tắc. Trình bày chi tiết các tiêu chuẩn cho chuẩn tắc các hàm chỉnh hình và các hàm phân hình. Cuối chương chúng tôi tìm hiểu kết quả của Trần Văn Tấn, Nguyễn Văn Thìn và Vũ Văn Trường về sự mở rộng Định lý Montel tới trường hợp đạo hàm cầu bị chặn và các điểm được thay bởi các hàm.

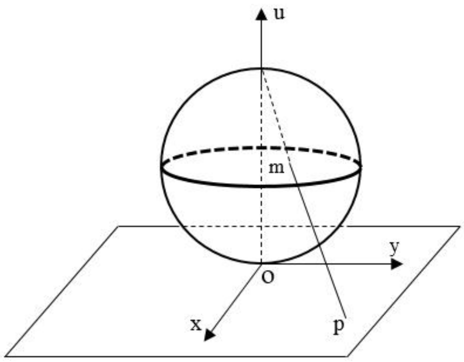
Chương 1

Khái niệm họ chuẩn tắc các hàm phân hình

1.1 Khoảng cách cầu

Trong hình sau, phương trình của mặt cầu S là:

$$x^2 + y^2 + (u - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}. \qquad (1.1)$$



Xét 1 số phức $z = x + iy$. Cho p là một điểm của mặt phẳng (Oxy) tương ứng với z, có tọa độ là (x, y). Đường thẳng nối hai điểm N và p giao với S tại một điểm m khác N. Ta gọi m là điểm của S tương ứng với z. Khi đó tọa độ của m là (X, Y, u). Ta có: $X = hx$, $Y = hy$, $u - 1 = -h$. Trong đó h là một số dương. Thay vào (1.1) ta có:

$$\frac{1}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{1}{1 + |z|^2}.$$

Và:

$$X = \frac{x}{1 + |z|^2}, Y = \frac{y}{1 + |z|^2}, Z = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2}. \qquad (1.2)$$

Điểm của S tương ứng với ∞ là điểm N có tọa độ là $(0, 0, 1)$.

Định nghĩa 1.1.1. Cho z_1 , z_2 là hai điểm của mặt phẳng phức mở rộng $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \bigcup \infty$ và m_1 , m_2 là hai điểm của S tương ứng lần lượt là z_1, z_2.

Chiều dài của đoạn thẳng $\overline{m_1m_2}$ được định nghĩa lần lượt là khoảng cách cầu giữa z_1, z_2 và được kí hiệu bởi $|z_1, z_2|$.
Để tìm ra biểu thức của $|z_1, z_2|$. Chia 3 trường hợp: 1) Cả z_1, z_2 đều hữu hạn. Cho $z_j = x_j + iy_j (j = 1, 2)$ và tập $k_j = 1 + |z_j|^2 (j = 1, 2)$. Từ (1.2), ta có:

$$\begin{aligned}(k_1k_2|z_1, z_2|)^2 =&(k_2x_1 - k_1x_2)^2 + (k_2y_1 - k_1y_2)^2 + (k_1 - k_2)^2\\ =&k_2^2k_1 + k_1^2k_2 - 2k_1k_2(x_1x_2 + y_1y_2 + 1),\end{aligned}$$

và do đó

$$k_1k_2|z_1, z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2). \tag{1.3}$$

Tiếp theo sử dụng các mối quan hệ

$$2x_j = z_j + \overline{z_j}, \quad 2iy_j = z_j - \overline{z_j}(j = 1, 2),$$

ta thấy rằng vế phải của (1.3) bằng $|z_1 - z_2|^2$. Vậy ta có công thức:

$$|z_1, z_2| = \frac{|z_1 - z_2|}{(1 + |z_1|^2)^{\frac{1}{2}}(1 + |z_2|^2)^{\frac{1}{2}}}. \tag{1.4}$$

2) Một trong z_1 hoặc z_2 là hữu hạn và số còn lại là vô hạn. Ví dụ $z_1 = x_1 + iy_1$ là hữu hạn và $z_2 = \infty$. Khi đó:

$$\begin{aligned}|z_1, z_2|^2 =&\frac{x_1^2}{(1 + |z_1|^2)^2} + \frac{y_1^2}{(1 + |z_1|^2)^2} + \frac{1}{(1 + |z_1|^2)^2}\\ =&\frac{1}{1 + |z_1|^2}.\end{aligned}$$

và do đó:

$$|z_1, z_2| = \frac{1}{(1 + |z_1|^2)^{\frac{1}{2}}}. \tag{1.5}$$

3) Cả z_1, z_2 đều vô hạn. Hiển nhiên $|z_1, z_2| = 0$.
Từ Định nghĩa 1.1.1, bất đẳng thức tam giác:

$$|z_1, z_3| \leqslant |z_1, z_2| + |z_2, z_3|. \tag{1.6}$$

Cố định cho 3 điểm bất kì $z_j(j = 1, 2, 3)$ của $\widehat{\mathbb{C}}$. Ta có thể xác định được công thức:

$$|z_1, z_2| = |\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}|. \tag{1.7}$$

Cố định cho 2 điểm bất kì $z_j(j = 1, 2)$ của $\widehat{\mathbb{C}}$.

Bổ đề 1.1.2. *Cho z_1, z_2 và $a \neq \infty$ là ba điểm của $\widehat{\mathbb{C}}$. Khi đó:*

$$|z_1 - a, z_2 - a| \geqslant \frac{1}{2}|a, \infty|^2 |z_1, z_2|.$$

Chứng minh. Giả sử $z_j \neq \infty (j = 1, 2)$. Từ Bổ đề 1.1.2 ta có công thức:

$$|z_1 - a, z_2 - a| = \frac{|z_1 - z_2|}{(1 + |z_1 - a|^2)^{\frac{1}{2}}(1 + |z_2 - a|^2)^{\frac{1}{2}}},$$

và bất đẳng thức:

$$\begin{aligned} 1 + |\zeta_1 - \zeta_2|^2 =& 1 + |\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 - 2Re(\zeta_1 \overline{\zeta_2}) \\ <& 2(1 + |\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 + |\zeta_1|^2|\zeta_2|^2) \\ =& 2(1 + |\zeta_1|^2)(1 + |\zeta_2|^2). \end{aligned}$$

Nếu một trong hai điểm z_1, z_2 là hữu hạn và còn lại là vô hạn, ví dụ $z_1 \neq \infty, z_2 = \infty$ ta áp dụng Bổ đề 1.1.2 với z_1 và $z_2' \neq \infty$, và sau đó cho $z_2' \to \infty$. □

Bổ đề 1.1.3. *Cho $A, B (A < B)$ là hai số dương. Khi đó có một số dương $\mu = \mu(A, B)$ chỉ phụ thuộc vào A và B sao cho $|z_1| \leqslant A, |z_2| \geqslant B$, ta có: $|z_1, z_2| \geqslant \mu$.*

Chứng minh. Nếu $|z_1| \leqslant A, |z_2| \geqslant B, z_2 \neq \infty$, khi đó:

$$\begin{aligned} |z_1, z_2| =& \frac{|z_1 - z_2|}{(1 + |z_1|^2)^{\frac{1}{2}}(1 + |z_2|^2)^{\frac{1}{2}}} \\ \geqslant& \frac{1 - |\frac{z_1}{z_2}|}{(1 + |z_1|^2)^{\frac{1}{2}}(1 + \frac{1}{|z_2|^2})^{\frac{1}{2}}} \\ \geqslant& \frac{1 - \frac{A}{B}}{(1 + A^2)^{\frac{1}{2}}(1 + \frac{1}{B^2})^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Điều này cũng đúng khi $z_2 = \infty$. □

1.2 Dãy các hàm phân hình

Định nghĩa 1.2.1. Một dãy các điểm $z_n (n = 1, 2, \cdots)$ của $\widehat{\mathbb{C}}$ được gọi là *hội tụ* đối với khoảng cách cầu, nếu mọi số dương ε tương ứng với một số nguyên dương N sao cho, với $n \geqslant N$, $m \geqslant N$, ta có:

$$|z_n, z_m| < \varepsilon. \tag{1.8}$$

Bổ đề 1.2.2. *Nếu một dãy các điểm $z_n (n = 1, 2, \cdots)$ của $\widehat{\mathbb{C}}$ hội tụ đối với khoảng cách cầu, khi đó tồn tại một điểm duy nhất Z trong $\widehat{\mathbb{C}}$ sao cho:*

$$\lim_{n \to +\infty} |z_n, Z| = 0. \tag{1.9}$$

Z được gọi là giới hạn của dãy $z_n (n = 1, 2, \cdots)$ đối với khoảng cách cầu.

Chứng minh. Đầu tiên ta thấy rằng tồn tại điểm Z. Nếu

$$\lim_{n \to \infty} |z_n, \infty| = 0,$$

khi đó $Z = \infty$ là một điểm. Ngoài ra ta có thể tìm được một số dương ε_0 và một dãy tăng các số nguyên dương $n_k (k = 1, 2, \cdots)$ sao cho

$$|z_{n_k}, \infty| \geqslant \varepsilon_0 \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

tức là z_{n_k} là hữu hạn và

$$|z_{n_k}| < (1 + |z_{n_k}|^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{|z_{n_k}, \infty|} \leqslant \frac{1}{\varepsilon_0}.$$

Dãy $z_{n_k} (k = 1, 2, \cdots)$ là bị chặn. Cho $Z \neq \infty$ là một điểm giới hạn của dãy $z_{n_k} (k = 1, 2, \cdots)$. Khi đó với số dương η bất kì và số nguyên dương K bất kì, tương ứng một số nguyên dương k sao cho

$$k \geqslant K, \quad |z_{n_k} - Z| < \eta.$$

Mà:

$$n_k \geqslant k, \quad |z_{n_k}, Z| \leqslant |z_{n_k} - Z|,$$

Ta có:

$$n' \geqslant K, \quad |z_{n'}, Z| < \eta, \quad (n' = n_k).$$